



## Estimation robuste par synthèse H2 de micro- et nanoforce à l'aide de ressorts magnétiques actifs.

Ali Cherry, Emmanuel Piat, Joël Abadie

### ► To cite this version:

Ali Cherry, Emmanuel Piat, Joël Abadie. Estimation robuste par synthèse H2 de micro- et nanoforce à l'aide de ressorts magnétiques actifs.. Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA), 2010, 44 (6), pp.631-659. 10.3166/jesa.44.631-659 . hal-00585577

**HAL Id: hal-00585577**

**<https://hal.science/hal-00585577>**

Submitted on 13 Apr 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Estimation robuste par synthèse $H_2$ de micro- et nanoforce à l'aide de ressorts magnétiques actifs

Ali Cherry — Emmanuel Piat — Joël Abadie

Institut FEMTO-ST - UMR CNRS 6174 - UFC/ENSMM/UTBM  
24, rue Alain Savary - 25000 Besançon  
Emmanuel.piat@ens2m.fr

---

**RÉSUMÉ.** Cet article aborde la problématique de la mesure de micro- et nanoforce en régime dynamique. La force constitue le signal excitateur inconnu d'un transducteur dont seule la grandeur de sortie est mesurable. Cette problématique de reconstruction d'un signal d'entrée inconnu à partir d'un signal de sortie bruité, est ici abordée sous l'angle de la synthèse  $H_2$ . Le contexte de sa mise en œuvre est celui d'un capteur actif de micro- et nanoforce qui utilise comme transducteur une masse sismique macroscopique contrôlée grâce à des ressorts magnétiques actifs. La méthodologie explicitée dans cet article pour estimer la force inconnue consiste à injecter un modèle de connaissance très sommaire sur la dynamique de cette force puis, via une approche par synthèse  $H_2$ , à faire en sorte que l'estimation reste performante malgré la dynamique mal amortie du transducteur, les bruits de mesures, l'incertitude sur la dynamique de la force à estimer et les erreurs de modélisation du capteur.

**ABSTRACT.** This article deals with the problematic of micro- and nanoforce measurement. The force is the unknown excitatory signal of a transducer whose only the output is measurable. This general problematic of an unknown input signal reconstruction from a noisy output signal is developed inside the  $H_2$  synthesis framework. The resulting methodology is implemented in a micro- and nanoforce sensor that uses a macroscopic seismic mass controlled by active magnetic springs. This methodology uses only a very basic knowledge on the force dynamic and thanks to  $H_2$  synthesis, ensures that the force estimation remains correct despite the transducer dynamic, the noise measurement, the uncertainty on the force dynamic and the sensor modeling errors.

**MOTS-CLÉS :** Mesure active de micro- et nanoforce, filtre de Kalman, commande par synthèse  $H_2$ .

**KEYWORDS:** Active measurement of micro- and nanoforce, Kalman filter,  $H_2$  control.

---

## 1. Introduction

La conception de capteurs de micro- et nanoforce est contrainte par le fait que seuls les effets d'une force sont directement mesurables. Par conséquent, un élément sensible (ES) à la force doit être utilisé pour observer ces effets. Cet ES est un transducteur qui convertit la force en une grandeur mesurable. Tous les capteurs de micro- et nanoforce reposent soit sur la mesure des *déplacements* d'un solide indéformable (ES constitué d'une masse sismique rigide), soit, plus classiquement, sur la mesure des *déformations* d'une microstructure élastique (ES constitué d'un corps d'épreuve). Donc, la force inconnue doit être déduite de la connaissance de ces déplacements ou déformations grâce à des capteurs appropriés. Si la réponse dynamique de l'ES ne peut pas être assimilée à un gain pur, la force inconnue doit être déduite en utilisant une étape de déconvolution ou un observateur à entrée inconnue (OEI) comme l'illustre la figure 1. Cette étape tient compte de la réponse dynamique de l'ES pour l'inverser et estimer correctement la force inconnue.

Lorsque le capteur de force est en plus actif, une force opposée est générée avec un contrôleur de manière à ce que les déplacements ou les déformations de l'ES tendent vers zéro (voir figure 2). Quand les déplacements ou les déformations sont nuls, la force  $u(t)$  générée par le contrôleur est l'exacte opposée de la force à mesurer. En régime transitoire, cette force  $u(t)$  n'est plus l'opposée de la force à mesurer et est généralement mal amortie dans le temps si la réponse transitoire en boucle ouverte de l'ES est également mal amortie (cas fréquent en mesure de micro- et nanoforce). Par conséquent, il est nécessaire d'utiliser un observateur pour tenir compte de cette réponse transitoire et estimer correctement à tout instant la force inconnue.

Cet article s'inscrit dans le contexte de la mesure active de force. L'estimation du couple et de la force est effectuée simultanément grâce à un transducteur sensible aux deux. La démarche explicitée conduit à une estimation de la force et du couple qui reste performante malgré la dynamique mal amortie du transducteur, les bruits de mesure, l'incertitude sur la dynamique de la force à estimer et les erreurs de modélisation du capteur. L'article est structuré comme suit : une sélection de prototypes de capteurs de micro- et nanoforce est présentée dans un premier temps pour illustrer l'originalité du capteur présenté. Ce dernier est ensuite brièvement décrit et un modèle dynamique linéaire simplifié à un seul degré de liberté est développé afin d'illustrer quelques principes importants qui régissent la dynamique du capteur actif complet. Ce modèle simplifié sert de base pour présenter la commande robuste par synthèse  $H_2$  de la masse sismique ainsi que l'estimation de la force inconnue. Ce modèle est ensuite étendu à un modèle linéarisé de l'ensemble des degrés de liberté du capteur. Les performances de mesure du capteur sont enfin illustrées en simulation à partir d'un modèle non linéaire.

## 2. Capteurs de micro- et nanoforce existants

L'importance de la mesure de force à l'échelle microscopique voire nanoscopique a conduit à de nombreux prototypes de capteurs de micro- et nanoforces. La plupart de ces prototypes ont des ES qui sont des microstructures élastiques passives. Ces capteurs diffèrent par le moyen utilisé pour mesurer la déformation de l'ES. Citons à titre d'exemple : les AFM avec photodiode 4 segments (Rougeot *et al.*, 2005 ; Girot *et al.*, 2006) ou interféromètre (Kato *et al.*, juin 1997), les capteurs de force piézorésistifs (Arai *et al.*, 1996 ; Arai *et al.*, 1998) qui utilisent la variation d'une résistance lorsqu'une force externe leur est appliquée, les capteurs de force piézoélectriques (Li et Xi, 2004) qui génèrent une différence de potentiel en présence d'un champ de force externe, les capteurs de force capacitifs (Sun *et al.*, 2003 ; Sun *et al.*, 2005) basés sur le principe de changement de capacitance induit par le changement de distance entre deux plaques de métal après l'application d'une force externe, etc. La capacité de déformation des microstructures étant faible, ces capteurs sont caractérisés par une faible plage de mesure.

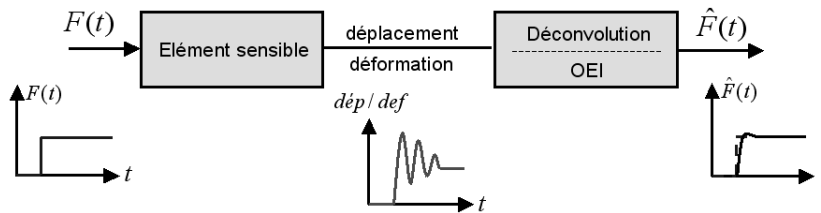


Figure 1. Capteur passif de micro- et nanoforce

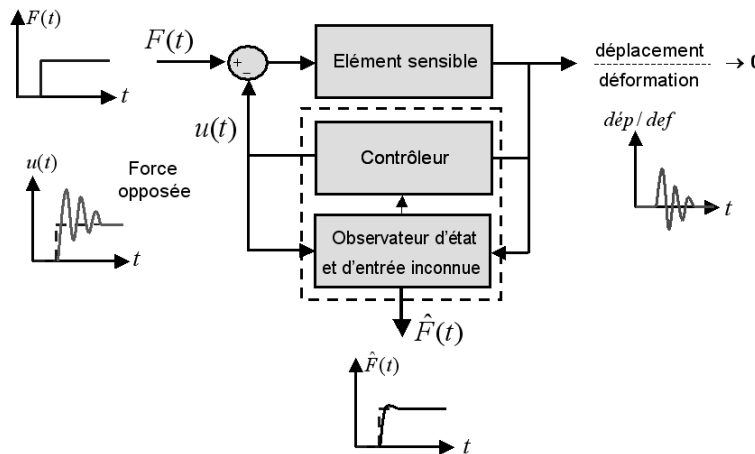


Figure 2. Capteur actif de micro- et nanoforce

Très peu de capteurs de force utilisent des ES sous la forme de solides indéformables macroscopiques capables d'effectuer de grands déplacements pour augmenter cette plage de mesure. On peut néanmoins citer deux prototypes. Le premier est un capteur de force qui utilise une masse de 21 grammes qui se déplace dans un roulement pneumatique linéaire (Fujii, 2006). Le frottement de l'air dans le roulement est supposé suffisamment faible pour être négligé. La résolution de ce capteur est de  $0,5 \mu\text{N}$  et sa gamme de mesure se situe essentiellement dans le millinewton. Le deuxième prototype utilise le principe de la lévitation diamagnétique passive de deux aimants permanents solidarisés par un micro capillaire en verre de diamètre 0,5 mm et d'épaisseur 0,1 mm (Boukallel *et al.*, 2003a; Boukallel *et al.*, 2003b; Boukallel *et al.*, 2004). Cette masse sismique forme donc une tige qui lévite passivement de manière stable. Elle présente un comportement linéaire pour des déplacements longitudinaux de l'ordre de  $\pm 1$  mm. Le déplacement de cette masse sismique sous l'action d'une force externe est mesuré à l'aide d'un capteur confocal chromatique. Grâce à deux ressorts magnétiques passifs, ce déplacement est proportionnel à la force externe lorsque le régime statique est atteint. Ce capteur linéaire ne mesure que des forces colinéaires à l'axe longitudinal de la tige. Il est caractérisé par une large plage de mesure (typiquement une centaine de micronewtons) et une faible raideur ajustable (typiquement de  $0,01$  à  $0,03 \text{ N.m}^{-1}$ ). Sa résolution en force dépend de la résolution du capteur de déplacement utilisé ainsi que des bruits induits par les conditions environnementales. Une résolution de quelques nN est atteinte sous cloche avec une table antivibration classique et un capteur confocal chromatique CL2 commercialisé par STIL SA.

Tous les capteurs de microforce cités précédemment sont des capteurs passifs (non asservis), dans lesquels la force est mesurée à partir du déplacement ou de la déformation d'un ES. À notre connaissance, il n'existe pas encore dans la littérature de capteurs de microforce asservis dédiés à la micromanipulation du fait de la complexité de ces dispositifs (même les modes asservis des AFM ne rentrent pas dans cette catégorie car ces dispositifs ne fournissent pas directement une force). Par contre, on trouve des publications sur les micro-accéléromètres asservis dont le principe de mesure est assez similaire au principe des capteurs de microforces (Soen, 2007). Ces capteurs intègrent généralement une masse sismique microscopique reliée à des ressorts (liaisons élastiques). En mesurant la force à laquelle est soumise cette masse, on déduit l'accélération. Le travail présenté dans (Soen, 2007) utilise la synthèse  $H_\infty$  pour contrôler un accéléromètre actif à un degré de liberté.

Le principe d'estimation de la force qui est développé dans cet article repose sur un capteur actif dont la conception est largement inspirée du capteur passif de micro- et nanoforce utilisant le principe de la lévitation diamagnétique passive (Boukallel *et al.*, 2003a). Les différences majeures sont qu'un principe répulsif de flottaison remplace l'effet répulsif diamagnétique, trois degrés de liberté sont exploités pour la mesure au lieu d'un seul et enfin la mesure est active au lieu d'être passive.

En mesure de micro- et nanoforce, la dynamique de l'élément sensible est souvent négligée devant la dynamique de l'entrée inconnue (force ou couple) à estimer. Ce faisant, l'élément sensible peut être assimilé à un simple gain dont la connaissance est obtenue à partir de l'étalonnage du capteur. Ce n'est que très récemment que cette dynamique a commencé à être prise en compte sur des capteurs passifs de force (Rakotondrabe et Lutz, 2009). Indépendamment du contexte de la mesure de force, de nombreux travaux ont été menés sur l'estimation ou la reconstruction d'une entrée inconnue. Ils peuvent être regroupés en deux catégories. La première suppose qu'on n'a aucune connaissance *a priori* sur cette entrée inconnue et procède soit par estimation de cette dernière (déconvolution par commande optimale (Sekko, 1992), observateur à dynamique inverse (Liu et Peng, 2002 ; Rakotondrabe et Lutz, 2009), etc.), soit par son élimination complète des équations du système comme dans le cas des observateurs à entrées inconnues (OEI). Ces observateurs ont été développés pour estimer l'état d'un système en dépit des perturbations (Johnson, 1975 ; Hou et Mtiler, 1992 ; Darouach *et al.*, 1994 ; Yi et Mehrdad, 2003). La deuxième catégorie suppose la connaissance *a priori* d'informations sur cette entrée non mesurable (processus générateur, densité spectrale de puissance, composantes déterministes, etc.). Les méthodes d'estimation optimale ainsi que la déconvolution par méthode de régularisation (Clayton et Wiggins, 1976) introduite dès les années 1960 font partie de cette deuxième catégorie. Contrairement à (Soen, 2007) qui utilise la synthèse  $H_\infty$ , nous allons nous intéresser à une méthode d'estimation optimale dans le cadre de la synthèse  $H_2$  introduite par (de Larminat, 2000). Cette méthode va être adaptée à notre capteur actif et va permettre de s'affranchir de la connaissance des bruits d'état et de mesure toujours délicats à déterminer et pas forcément stationnaires en pratique. Sans contester l'intérêt de la théorie  $H_\infty$ , cette approche a été choisie car elle offre de bonnes performances statique et dynamique et une simplicité de réglage du contrôleur et de l'estimateur à l'aide de deux scalaires  $T_c$  et  $T_o$  représentant des horizons de filtrage et de commande.

Ce type de réglage présente un intérêt dans le contexte de la mesure de micro- et nanoforce du fait que l'amplitude des forces impliquées dans la dynamique des phénomènes présents à l'échelle micrométrique est très étendue (de la centaine de nanonewton à quelques dizaines de millinewtons). Ceci nécessite par exemple d'utiliser sur un AFM plusieurs têtes de mesure avec des raideurs adaptées à la déformation admissible du levier. Il faut donc réétalonner le dispositif de mesure à chaque fois, ce qui est à la fois délicat et fastidieux. Le capteur présenté ici possède une grande plage de mesure (de quelques nN à la centaine de  $\mu$ N) qui permet de s'affranchir, dans une large mesure, de ce problème. Néanmoins, l'estimation d'une entrée inconnue telle qu'une force impose forcément un compromis entre le temps de réponse de l'estimateur et sa variance. Qualitativement, cela se comprend aisément à l'aide de la figure 1 : l'élément sensible a toujours un comportement fréquentiel de type passe bas avec une fréquence de résonance plus ou moins marquée. Pour reconstruire correctement l'entrée inconnue  $F(t)$ , il faut donc inverser cette réponse fréquentielle, ce qui induit que le bloc de déconvolution possède un gain très élevé dans les hautes fréquences. Par

conséquent, si le dispositif qui mesure le déplacement ou la déformation possède un bruit de mesure même faible, les composantes hautes fréquences de ce bruit vont être énormément amplifiées par le gain très élevé dans les hautes fréquences du bloc de déconvolution. La variance de  $\hat{F}(t)$  sera alors très élevée. Pour réduire cette variance, il faut donc diminuer le gain dans les hautes fréquences du bloc de déconvolution. Les hautes fréquences présentes dans  $F(t)$  (cf. l'échelon de force dans la figure 1) ne sont alors plus reconstruites correctement, puisqu'on les filtre, ce qui a pour effet d'augmenter le temps de réponse de  $\hat{F}(t)$  (cf. la force reconstruite sur la figure 1). Ce compromis entre temps de réponse et variance de l'estimateur de la force impose des comportements différents pour l'estimateur selon qu'on désire mesurer des forces de faible amplitude ou de grande amplitude. Pour les faibles amplitudes, il faudra forcément une variance faible pour pouvoir distinguer le signal de la force dans le bruit, et donc un temps de réponse élevé. Par contre pour les grandes amplitudes, on peut se contenter d'une variance plus importante, ce qui permet d'avoir des temps de réponse plus faible. En mesure active de micro- et nanoforce, le compromis est identique et il est particulièrement important d'avoir un contrôleur et un estimateur de la force qui permette de le régler facilement. L'approche dans le cadre de la synthèse  $H_2$  qui est proposée dans cet article répond à ce cahier des charges grâce au réglage des scalaires  $T_c$  et  $T_o$ .

### 3. Capteur actif électromagnétique de micro- et nanoforce

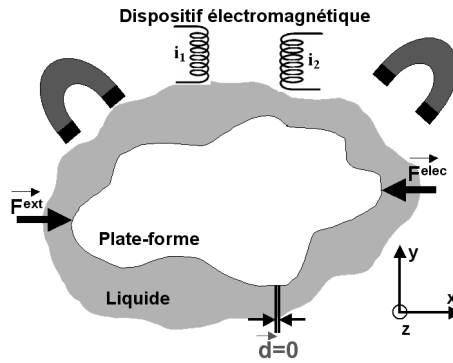
Le capteur, qui sert ici de contexte de mise en œuvre, utilise comme élément sensible une plate-forme macroscopique flottante supposée indéformable qui peut se déplacer suivant les six degrés de liberté de l'espace. Le principe de flottaison couplé à des ressorts magnétiques a été adopté pour stabiliser passivement la plate-forme en boucle ouverte (BO). Ce transfert entrée-sortie stable en BO a pour entrée la force et le couple externe ( $F^{ext}, \zeta^{ext}$ ) appliqués à la plate-forme et pour sortie le déplacement (translations et rotations) de la plate-forme. Les ressorts magnétiques sont utilisés pour stabiliser en BO la plate-forme dans le plan horizontal ( $xOy$ ) et autour de l'axe vertical  $\vec{z}$ . La poussée d'Archimède, quant à elle, permet d'obtenir la stabilité en BO de la plate-forme dans les autres directions spatiales (Cherry, 2009). Cette plate-forme est conçue pour mesurer uniquement les deux composantes horizontales  $F_x^{ext}$  et  $F_y^{ext}$  ainsi que le couple  $\zeta_z^{ext}$  porté par  $\vec{z}$ . Dans les autres directions spatiales, la mesure de force ou de couple n'est pas possible car la poussée d'Archimède dégrade la sensibilité du capteur.

La configuration active du capteur utilise des dispositifs électromagnétiques pour produire une force et un couple électromagnétique antagonistes notés globalement  $\vec{F}^{elec}$  de manière à maintenir la plate-forme sur sa position initiale (voir figure 3).

Dans ce cas, les courants  $\vec{i}$  dans les dispositifs électromagnétiques sont l'image de la force et du couple externe appliqués lorsque le régime statique est atteint :

$$\vec{F}^{elec} = - \begin{bmatrix} \vec{F}^{ext} \\ \zeta_z^{ext} \end{bmatrix} = f(\vec{i}) = K^e \cdot \vec{i} = K^e \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad [1]$$

$K^e$  est la matrice des « raideurs électromagnétiques » de la plate-forme.



**Figure 3.** Principe électromagnétique actif de mesure de force

#### 4. Ressort magnétique actif

Cette section décrit brièvement le principe de fonctionnement d'un ressort magnétique actif couplé à un mécanisme de flottaison. Un tel ressort (voir figure 4) est composé d'un flotteur cylindrique comportant un aimant permanent  $M$ , en  $NdFeB$ , de 2 mm de rayon et de 2,5 mm d'épaisseur. Cet aimant est en interaction avec un dispositif magnétique composé de deux aimants permanents cubiques  $p$  en  $NdFeB$  (5 mm de côté). Ces aimants sont placés de part et d'autre du flotteur, équidistants à  $M$ , et disposés tels que leurs pôles soient opposés.

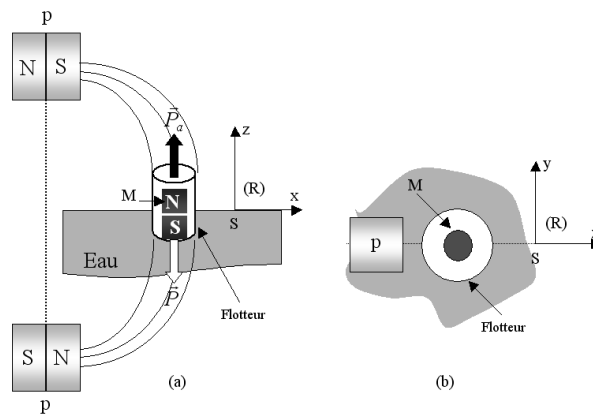
Avec une telle configuration, la partie flottante est stable en BO dans le plan  $(xOy)$  grâce aux efforts magnétiques générés par le dispositif magnétique (Boukallel *et al.*, 2003a). La poussée d'Archimède  $P_a$ , quant à elle, contre le poids  $P$  de la partie flottante et assure sa stabilité suivant l'axe  $\vec{z}$  du repère  $R$  (voir figure 4). L'origine du repère  $R$  est la position d'équilibre  $S$  du centre de gravité de  $M$  (qu'on suppose confondu avec celui de la partie flottante) lorsque la force externe est nulle. La distance entre les deux aimants  $p$  influence la valeur de la force magnétique  $F^{mag}$  appliquée à l'aimant en flottaison  $M$ . Dans ce qui suit, on va supposer, pour simplifier l'exposé, que la force externe  $F^{ext}$  est colinéaire à l'axe  $\vec{x}$  du repère  $R$ . On ne s'intéresse donc plus qu'à la dynamique selon  $\vec{x}$  de la partie flottante. Sous ces hypothèses,



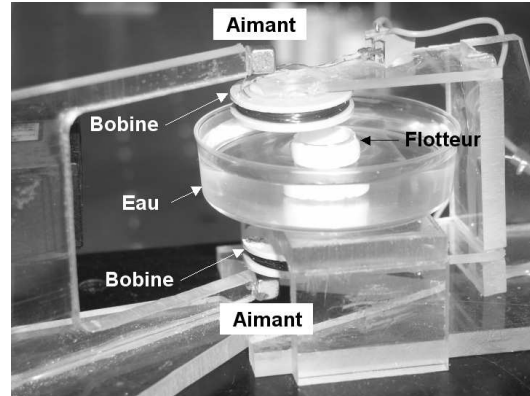
$F_x^{mag}$  constitue une force de rappel remarquablement linéaire sur des déplacements de l'ordre du millimètre (Boukallel *et al.*, 2003b). On peut donc poser :

$$F_x^{mag} = -K_x^m x \quad [2]$$

où  $K_x^m$  est la « raideur magnétique » de la partie flottante et  $x$  la position de son centre de gravité dans  $R$ . A titre d'illustration, sur le prototype expérimental de cette configuration élémentaire (voir figure 5), cette raideur est de l'ordre de  $0,015 \text{ N.m}^{-1}$ .



**Figure 4.** Mécanisme de flottaison-magnétique : (a) vue de côté, (b) vue du dessus

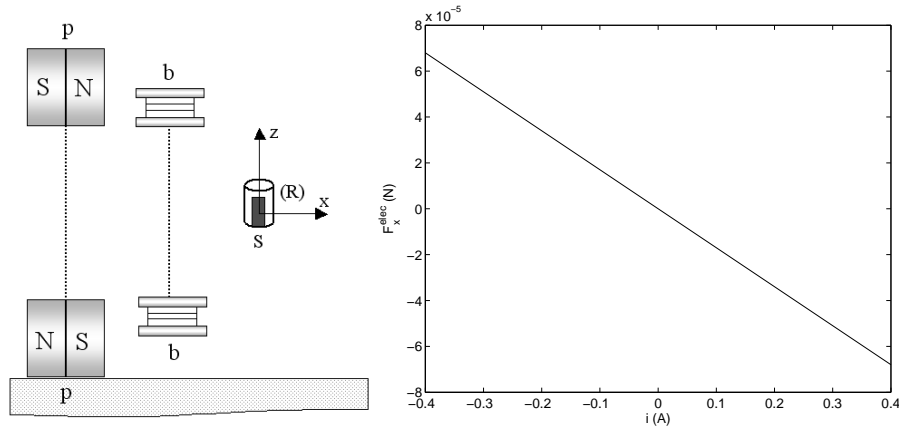


**Figure 5.** Prototype expérimental du mécanisme de flottaison-magnétique

Le système d'asservissement en position utilise deux bobines  $b$  placées de part et d'autre du flotteur (voir figure 6). Ces bobines sont alimentées en série par la grandeur de commande  $i$ . Le déplacement selon  $\vec{x}$  de la plate-forme est mesuré par un capteur

de type confocal chromatique. La problématique à résoudre est de concevoir une loi de commande du courant  $i$  dans les deux bobines afin de permettre l'estimation de la force externe inconnue  $F_x^{ext}$  qui s'exerce sur le centre de gravité de  $M$  tout en ayant des déplacements contrôlés du flotteur dans le plan  $(xOy)$ . En présence de  $F_x^{ext}$  qui tend à écarter le flotteur de sa position d'équilibre  $S$  (origine du repère  $R$ ), l'alimentation en courant des bobines va donc opposer une force électromagnétique  $F_x^{elec}$  de manière à ramener le flotteur en  $S$ . Sur cette position d'équilibre, il s'avère que la caractéristique statique  $F_x^{elec}/i$  est linéaire (voir figure 6). Par conséquent, en  $S$ , le capteur est caractérisé par une raideur électromagnétique  $K_x^e$  constante :

$$F_x^{elec} = K_x^e \cdot i(t) \quad [3]$$



**Figure 6.** Système d'asservissement et force électromagnétique  $F_x^{elec}$  à la position d'équilibre stable  $S$  et pour différents courants  $i$

Sur le prototype expérimental de la figure 5,  $K_x^e$  est de l'ordre de  $-1,716 \times 10^{-4} \text{ N.A}^{-1}$ . Lorsque le régime statique est atteint sur la position d'équilibre stable  $S$ , la force électromagnétique  $F_x^{elec}$  est la seule force qui annule  $F_x^{ext}$  puisque les forces magnétiques sont nulles en  $S$  ainsi que la force de frottement visqueux en absence de régime dynamique.

La dynamique de  $M$  pour des déplacements millimétriques à basse vitesse est celle d'un système masse-ressort-amortisseur à un degré de liberté. Elle est régie suivant  $\vec{x}$  par l'équation différentielle :

$$m\ddot{x} = F_x^{ext} + K^e \cdot i - K_x^m \cdot x - K_x^v \cdot \dot{x} \quad [4]$$

avec  $K_x^v$  le coefficient de frottement visqueux entre le liquide et le flotteur. L'étude dynamique et statique complète d'un ressort magnétique est présentée dans (Cherry

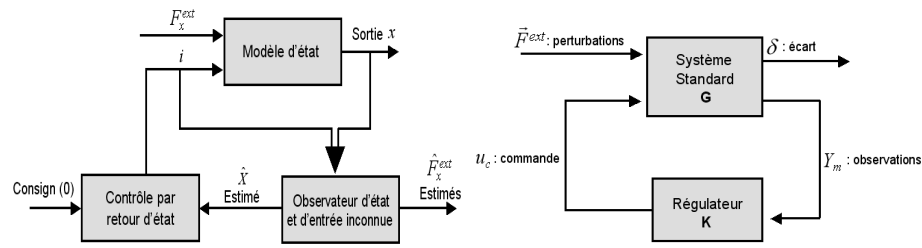
et al., 2007). Dans ce qui suit, nous allons utiliser la représentation d'état suivante déduite de [4] :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}}_{\dot{X}_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_x^m}{m} & -\frac{k_x^v}{m} \end{bmatrix}}_{A_{11}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_{X_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_x^e}{m} \end{bmatrix}}_{B_1} \underbrace{\begin{bmatrix} i \end{bmatrix}}_{u_c} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{G_1} \begin{bmatrix} F_x^{ext} \end{bmatrix} \quad [5]$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C_1} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_{X_1}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = A_{11} \cdot X_1 + B_1 \cdot u_c + G_1 \cdot F_x^{ext} \\ Y_1 = C_1 \cdot X_1 \end{cases} \quad [6]$$



**Figure 7.** Asservissement du flotteur à la position «zéro et principe de la commande par synthèse  $H_2$

## 5. Mesure active de force

Cette section détaille l'asservissement en position du flotteur qui permet l'estimation de la force externe  $F_x^{ext}$ . La partie gauche de la figure 7 décrit la nature du problème à résoudre. Les entrées du système sont le courant  $i$  dans les bobines et la force  $F_x^{ext}$  considérée comme une entrée inconnue de perturbation qu'il va falloir déterminer. La sortie est la position  $x$  du flotteur dans le repère  $R$ .

### 5.1. Principe de la commande par synthèse $H_2$

Tout asservissement peut se mettre sous la forme standard à droite dans la figure 7. Le système standard  $G$ , bouclé par le régulateur  $K$ , engendre un système ayant pour

entrée la perturbation  $F^{ext}$  et pour sortie l'écart  $\delta$  se définissant naturellement comme la différence entre la consigne  $y_c$  et la grandeur à piloter  $Y$ .

Le problème standard se traduit alors par la recherche du régulateur  $K$  qui minimise le transfert  $H$  de  $F^{ext}$  vers  $\delta$  de manière à ce que  $\delta$  tende vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini. L'entrée  $F^{ext}$  représente, dans le cas du ressort magnétique actif, la force externe appliquée au flotteur (suivant  $\vec{x}$ ) qui tend à le déplacer de sa position d'équilibre stable  $S$ . Par ailleurs, cette entrée peut aussi comporter des signaux irréductibles qui sont supposés être à l'origine des bruits, consignes et perturbations diverses intervenant sur le procédé à piloter. Le vecteur des observations  $Y_m$ , quant à lui, regroupe tous les signaux d'entrée du régulateur. Il inclut non seulement la mesure des grandeurs à piloter, mais encore les mesures annexes disponibles sur le procédé, les mesures éventuelles des perturbations et également les signaux de consigne.

Dans le cadre de la commande par synthèse  $H_2$ , on cherche à établir une loi de commande par retour d'état qui minimise un critère quadratique (de Larminat, 2000 ; de Larminat, 2007 ; Lang *et al.*, 2007), du type suivant :

$$J = \int_0^\infty (X^T(t) \cdot Q \cdot X(t) + u^T(t) \cdot R \cdot u(t)) dt \quad [7]$$

Ce critère est un critère de compromis entre l'énergie de commande et la vitesse de rejet de perturbation, avec  $Q$  une matrice symétrique définie non négative telle que  $X^T(t) \cdot Q \cdot X(t) \geq 0 \forall X(t)$ .  $R$  est une matrice symétrique définie positive telle que  $u^T(t) \cdot R \cdot u(t) > 0$ , si  $u(t) \neq 0$ . C'est la matrice de pondération de la commande. On peut ainsi affecter un poids différent à chaque composante du vecteur de commande. Dans le cas du ressort magnétique actif, la commande n'a qu'une seule composante qui est le courant  $i$  dans les bobines de commande  $b$ .

## 5.2. Elaboration du modèle standard

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'élaboration de la représentation d'état du système standard  $G$  pour la commande en position du flotteur. Cette élaboration consiste à modéliser les perturbations, les bruits connus ainsi que les consignes intervenant sur le procédé puis à introduire ces derniers dans le modèle d'état du procédé pour obtenir un modèle étendu.

L'évolution des perturbations et des consignes peut être modélisée par des équations différentielles, auxquelles on associe un modèle d'état. Pour cela, on élabore un vecteur  $X_2$  que l'on nomme vecteur de perturbation, dans lequel on modélise notre consigne ( $y_c$ ) et notre perturbation ( $F_x^{ext}$ ). Habituellement, consigne et perturbation sont représentées dans le vecteur  $X_2$  par leur amplitude et leur dérivée. Dans notre cas, la consigne est nulle ( $y_c = 0$ ) et n'a pas de dynamique donc son amplitude n'évolue pas. En absence de connaissance sur la dynamique de la perturbation  $F_x^{ext}$ , on ne va

inclure que son amplitude dans  $X_2$  et on reporte le problème de l'estimation de la dynamique de  $F_x^{ext}$  au niveau de l'observateur qui sera défini plus loin. La représentation du vecteur  $X_2$  est alors la suivante :

$$X_2 = \begin{bmatrix} y_c \\ F_x^{ext} \end{bmatrix} \quad [8]$$

A ce stade, on suppose que l'évolution de la dynamique du flotteur est suffisamment déterministe pour ne pas avoir à considérer de composantes stochastiques dans ce modèle déterministe. Par concaténation, on réunit les équations du procédé [6] et le vecteur  $X_2$ . Il en résulte un système dont l'entrée est  $u_c$  et la sortie est  $y$ ,  $y_c$  et  $(y - y_c)$ . Ce système a la forme générale suivante :

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = A_{11} \cdot X_1 + A_{12} \cdot X_2 + B_1 \cdot u_c \\ Y_m = \begin{bmatrix} y \\ y_c \end{bmatrix} = C_{1m} \cdot X_1 + C_{2m} \cdot X_2 \\ \delta = \begin{bmatrix} y_c - y \end{bmatrix} = D_1 \cdot X_1 + D_2 \cdot X_2 \end{cases} \quad [9]$$

avec :

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix} \quad C_{1m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_{2m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ D_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En concaténant  $X_1$  et  $X_2$  en un état étendu  $X_e$  qui inclut notamment la force à estimer (présente dans  $X_2$ ), ce modèle standard  $G$  [9] s'écrit encore :

$$\begin{cases} \frac{dX_e}{dt} = A_e \cdot X_e + B_e \cdot u_c \\ Y_e = C_e \cdot X_e \end{cases} \quad [10]$$

avec :

$$X_e = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \quad Y_e = \begin{bmatrix} Y_m \\ \delta \end{bmatrix}, \quad A_e = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \\ B_e = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } C_e = \begin{bmatrix} C_{1m} & C_{2m} \\ D_1 & D_2 \end{bmatrix}$$

Notons que la matrice  $A_{22}$  est inconnue puisqu'on ne sait pas *a priori* comment varie la force externe  $F_x^{ext}$  dans  $X_2$ . Néanmoins, la paire  $(A_e, C_e)$  du modèle standard est entièrement observable quel que soit  $A_{22}$ .

### 5.3. Détermination d'un reconstituteur de l'état étendu

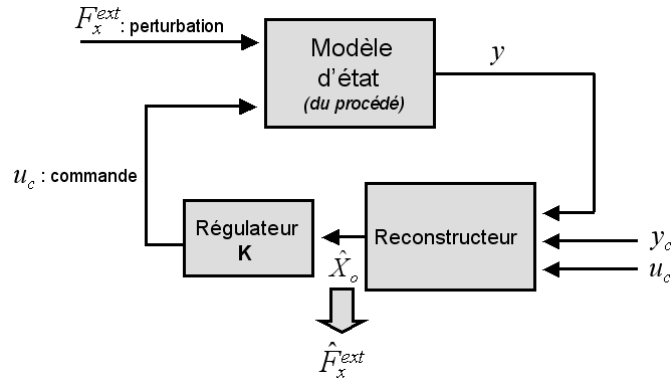
Comme la synthèse  $H_2$  repose sur une commande par retour d'état minimisant un critère quadratique, la détermination d'un reconstituteur d'état (voir figure 8) est indispensable car les composantes du vecteur d'état étendu  $X_e$  sont, soit inaccessibles

à la mesure, soit mesurables mais bruitées. Parmi les composantes inaccessibles, on trouve la vitesse du flotteur  $\dot{x}$  ainsi que la perturbation  $F_x^{ext}$  que nous cherchons à estimer. La position  $x$  du flotteur est une composante bruitée.

Dans la suite, nous allons nous intéresser à la reconstruction de l'état  $X_e$  à partir de la mesure de  $Y_m$ . Pour simplifier cette reconstruction, nous allons extraire un sous-modèle  $W$  observable du modèle standard  $G$  sans tenir compte de  $\delta$  qui n'intervient pas dans l'élaboration du reconstruteur. Ce sous-modèle  $W$  aura comme entrée la commande  $u_c$  et comme sortie  $Y_m$  qui regroupe la sortie  $y$  à piloter et la consigne  $y_c$  (cf. équations [9]) :

$$\begin{cases} \frac{dX_o}{dt} = A_o \cdot X_o + B_o \cdot u_c \\ Y_m = C_o \cdot X_o \end{cases} \quad [11]$$

avec  $X_o = X_e$ ,  $A_o = A_e$ ,  $B_o = B_e$  et  $C_o = [C_{1m} C_{2m}]$



**Figure 8.** Loi de commande finale

A ce stade, il est nécessaire de faire apparaître explicitement dans  $W$  les incertitudes de modélisation ainsi que tous les bruits qui ont un impact sur l'observateur. On pose classiquement :

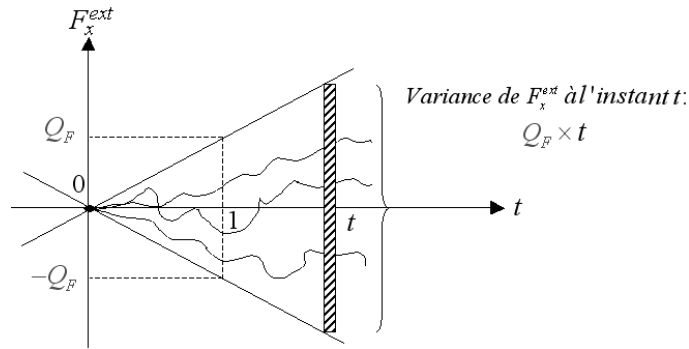
$$\begin{cases} \frac{dX_o}{dt} = A_o \cdot X_o + B_o \cdot u_c + \alpha \\ Y_m = C_o \cdot X_o + \beta \end{cases} \quad [12]$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les vecteurs des bruits d'état (généralement représentatifs des incertitudes dues à l'influence sur la dynamique de phénomènes non pris en compte) et d'observation (généralement représentatifs des bruits de mesure). Si on extrait de [12] la dynamique qui conditionne uniquement l'évolution de la force inconnue dans  $X_o$ ,

et qu'on choisit  $A_{22} = 0$ ,  $F_x^{ext}$  étant multipliée par un terme nul dans  $A_o$ , on obtient l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dF_x^{ext}}{dt} = \alpha_F \quad [13]$$

avec  $\alpha_F$  la quatrième composante de  $\alpha$ . [13] représente la connaissance *a priori* sur la dynamique de  $F_x^{ext}$  qui est utilisée par l'observateur. Cette connaissance est paramétrée par le processus aléatoire  $\alpha_F$  qu'on choisit blanc gaussien centré. [13] est alors un processus de Wiener, uniquement paramétré par l'intensité  $Q_F$  de  $\alpha_F$ . Avec ce modèle prédictif, la force inconnue  $F_x^{ext}(t)$ , considérée comme une variable aléatoire à l'instant  $t$  futur, a alors une variance *a priori* qui vaut  $Q_F \times t$  (Maybeck, 1979) comme l'illustre la figure 9. Par conséquent, plus  $Q_F$  est grand et plus  $F_x^{ext}(t)$  est susceptible de pouvoir prendre une large plage de valeurs possibles à  $t$ . Le réglage de  $Q_F$  et plus globalement la question du contenu effectif des bruits représentés par les processus aléatoires  $\alpha$  et  $\beta$  dans [12] seront abordés plus loin.



**Figure 9.** Evolution de la variance donnée par le modèle de connaissance de  $F_x^{ext}$

La reconstruction de l'état  $X_o$  va se faire à l'aide d'un filtre de Kalman stationnaire qui minimise  $E(\|X_o - \hat{X}_o\|^2)$  et qui est défini par :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{X}_o}{dt} &= A_o \cdot \hat{X}_o + B_o \cdot u_c + K_o(Y_m - C_o \cdot \hat{X}_o) \\ &= (A_o - K_o \cdot C_o) \cdot \hat{X}_o + B_o \cdot u_c + K_o \cdot Y_m \end{aligned} \quad [14]$$

avec  $K_o$  le gain du reconstruteur. La détermination du gain  $K_o$  du filtre se fait par minimisation de la variance engendrée par les bruits d'état et de mesure  $\alpha$  et  $\beta$ . Cette minimisation peut être obtenue par la minimisation du critère quadratique suivant :

$$J_o = \int_0^\infty (X_o^T \cdot Q_o \cdot X_o + R_o \cdot u_c^2) dt \quad [15]$$

avec  $Q_o$  l'intensité du bruit d'état  $\alpha$  et  $R_o$  l'intensité du bruit d'observation  $\beta$ . En pratique, la matrice  $Q_o$  est difficilement calculable puisque l'état étendu  $X_e = X_o$

possède des composantes inaccessibles à la mesure (vitesse du flotteur et force externe inconnue). De Larminat propose donc de considérer les matrices  $Q_o$  et  $R_o$  comme des matrices de pondération agissant sur la matrice de gain  $K_o$  (de Larminat, 2007) et de les déduire d'un paramètre de synthèse de plus haut niveau qui est un horizon de filtrage  $T_o$  à spécifier. Cette approche est valable dans le cas où le reconstituteur possède une certaine robustesse vis-à-vis des incertitudes modélisées par le bruit d'état. Le paramètre  $T_o$  est défini comme l'horizon temporel d'un grammien partiel d'observabilité :

$$H_o(T_o) = \int_0^{T_o} \exp(A_o^T \cdot t) \cdot C_o^T \cdot C_o \cdot \exp(A_o \cdot t) \cdot dt \quad [16]$$

La paire  $(A_o, C_o)$  est entièrement observable. De ce fait,  $H_o(T_o)$  est une matrice symétrique positive, et il est possible de choisir (de Larminat, 2007) :

$$R_o = I \quad \text{et} \quad Q_o = T_o H_o(T_o) \quad [17]$$

avec  $I$  la matrice d'identité.  $R_o$  étant normalisée, cette approche offre donc la possibilité de modifier les composantes de la matrice  $Q_o$  en modifiant simplement le scalaire  $T_o$ .

La démarche pour obtenir  $K_o$  est alors la suivante : on constate dans un premier temps que la matrice  $(A_o - K_o \cdot C_o)$  de l'équation [14] possède les mêmes valeurs propres que sa transposée  $(A_o^T - C_o^T \cdot K_o^T)$ . Or on peut montrer que cette dernière matrice est celle que l'on obtient en réalisant une commande par retour d'état  $u_c = -K_o^T \cdot X_o$  sur le système dual défini par :

$$\frac{dX_o}{dt} = A_o^T \cdot X_o + C_o^T \cdot u_c \quad [18]$$

On va donc rechercher la commande par retour d'état  $u_c$  agissant sur le modèle dual par minimisation du critère quadratique  $J_o$  de l'équation [15].

On sait alors que la matrice de gain  $K_o^T$  qui en résulte est la suivante (de Larminat, 2000) :

$$K_o^T = P_o \cdot C_o^T \cdot R_o^{-1} \quad [19]$$

où  $P_o$  est l'unique solution symétrique positive d'une équation matricielle du second ordre, dite équation de Riccati :

$$A_o \cdot P_o + P_o \cdot A_o^T + Q_o - P_o \cdot C_o^T \cdot R_o^{-1} \cdot C_o \cdot P_o = 0 \quad [20]$$

#### 5.4. Régulation en position du flotteur

Le modèle standard  $G$  élaboré n'est pas commandable du fait des perturbations prises en compte dans  $X_e$  (force externe dont le processus subit les effets). Dans



cette partie, nous allons nous intéresser dans un premier temps à la décomposition de notre modèle standard sous forme canonique de commandabilité dans le but de rejeter les états non commandables. Ensuite, après avoir rejeté l'effet des modes non commandables, on élaborera la commande finale pour le système dynamique.

Rappelons que le rôle de la commande n'est pas seulement de stabiliser le processus proprement dit (paire  $A_{11}, B_1$ ), mais aussi de rejeter l'effet qu'a  $X_2$  (et donc l'effet qu'a  $F_x^{ext}$ ) sur  $\delta$  et sur  $X_1$ , effet propagé par les matrices  $A_{12}$  et  $D_2$  dans [9].

#### 5.4.1. Décomposition selon la commandabilité

Dans un premier temps, on détermine une nouvelle transformation  $T_{co}$  qui réalise la décomposition canonique du vecteur d'état  $X_0$  en deux parties, une commandable notée  $X_c$  et l'autre non commandable notée  $X_{nc}$  :

$$\begin{bmatrix} X_c \\ X_{nc} \end{bmatrix} = T_{co} \cdot X_o \quad [21]$$

Il se trouve que la décomposition canonique selon la commandabilité est déjà réalisée avec la forme initiale du modèle standard, avec  $X_1 = X_c$  la partie commandable par  $u_c$  du vecteur d'état  $X_0$  et  $X_2 = X_{nc}$  la partie non commandable par  $u_c$ . Cette partie non commandable est généralement instable. On a donc :

$$\begin{bmatrix} X_c \\ X_{nc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = X_o \quad [22]$$

#### 5.4.2. Rejet asymptotique de la partie non commandable

Pour l'instant le problème se réduit à celui de la recherche d'un gain de retour d'état qui assure la convergence de  $\delta$  vers zéro en dépit de  $X_2$  qui est non commandable.

Présupposons que la commande  $u_c$  s'écrira :

$$u_c = \nu + u_a \quad [23]$$

où  $\nu$  est la commande de la partie commandable  $X_c$  du vecteur d'état  $X_o$  et  $u_a$  la commande asymptotique, destinée à compenser les effets de  $X_2 = X_{nc}$  sur  $\delta$ , pour laquelle on postule la forme suivante :

$$u_a = -G_a X_{nc} \quad [24]$$

Introduisons une transformation de la forme générale :

$$\begin{cases} \tilde{X}_c = X_c + T_a X_{nc} \\ \tilde{X}_{nc} = X_{nc} \end{cases} \quad [25]$$

En substituant [23], [24] et [25] dans le modèle standard [9], on obtient le nouveau système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}}_c = A_{11}\tilde{X}_c + [-A_{11}T_a - B_1G_a + A_{12}]\tilde{X}_{nc} + B_1\nu \\ \delta = D_1\tilde{X}_c + [D_2 - D_1T_a]\tilde{X}_{nc} \end{cases} \quad [26]$$

Pour compenser les effets qu'a la partie non commandable  $X_2 = X_{nc}$  sur  $\delta$  et sur  $X_1 = X_c$ , il suffit d'annuler les termes entre crochets des équations [26] ci-dessus. Pour cela,  $T_a$  et  $G_a$  devront donc satisfaire simultanément les équations linéaires suivantes :

$$\begin{cases} A_{12} = A_{11}T_a + B_1G_a \\ D_2 = D_1T_a \end{cases} \quad [27]$$

Les équations [26] deviennent alors :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}}_c = A_{11}\tilde{X}_c + B_1\nu \\ \delta = D_1\tilde{X}_c \end{cases} \quad [28]$$

où la paire  $(A_{11}, B_1)$  est commandable, et où il existe donc génériquement une commande par retour d'état de la forme suivante :

$$\nu = -K_c\tilde{X}_c \quad [29]$$

avec  $K_c$  le gain de retour. Cette commande engendrera  $\tilde{X}_c \rightarrow 0$ , en choisissant  $K_c$  de manière à ce que la matrice  $(A_{11} - B_1 \cdot K_c)$  aie des valeurs propres dont la partie réelle est inférieure à 0, d'où :

$$\delta = D_1\tilde{X}_c \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \nu = -K_c\tilde{X}_c \rightarrow 0$$

La détermination de  $K_c$  se fait par minimisation du critère quadratique  $J_c$  qui pénalise  $\tilde{X}_c$  et  $\nu$  :

$$J_c = \int_0^\infty (\tilde{X}_c^T(t) \cdot Q_c \cdot \tilde{X}_c(t) + R_c \cdot \nu^2(t)) dt \quad [30]$$

La matrice de gain  $K_c$  qui en résulte est la suivante :

$$K_c = R_c^{-1} \cdot B_1^T \cdot P_c \quad [31]$$

où  $P_c$  est l'unique solution symétrique positive d'une équation matricielle du second ordre, dite équation de Riccati :

$$A_{11}^T \cdot P_c + P_c \cdot A_{11} + Q_c - P_c \cdot B_1 \cdot R_c^{-1} \cdot B_1^T \cdot P_c = 0 \quad [32]$$

$Q_c$  et  $R_c$  sont des paramètres de synthèse.

On revient maintenant aux variables  $u_c$ ,  $X_1$  et  $X_2$  [23]. La commande s'écrit :

$$\begin{aligned}
 u_c &= \nu + u_a \\
 &= -K_c \tilde{X}_c - G_a \tilde{X}_{nc} \\
 &= -K_c (X_1 + T_a X_2) - G_a X_2 \\
 &= -K_c X_1 - [K_c T_a + G_a] X_2 \\
 &= -[K_c, (K_c \cdot T_a + G_a)] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

or d'après [22] on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_c \\ X_{nc} \end{bmatrix} = X_o$$

et par conséquent la loi de commande par retour d'état reconstruit aura pour expression (principe de séparation) :

$$u_c = -G \cdot X_o = -G \cdot \hat{X}_o \quad [33]$$

avec :

$$G = -[K_c, (K_c \cdot T_a + G_a)] \quad [34]$$

En tenant compte de l'équation [14] du reconstruteur d'état, on aboutit à :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\hat{X}_o}{dt} &= [A_o - K_o \cdot C_o] \cdot \hat{X}_o + B_o \cdot u_c + K_o \cdot Y_m \\
 &= [A_o - K_o \cdot C_o] \cdot \hat{X}_o - B_o \cdot G \cdot \hat{X}_o + K_o \cdot Y_m \\
 &= [A_o - B_o \cdot G - K_o \cdot C_o] \cdot \hat{X}_o + K_o \cdot Y_m
 \end{aligned}$$

Par conséquent la matrice d'état  $[A_o - B_o \cdot G - K_o \cdot C_o]$  est la matrice qui définit la dynamique globale du système bouclé.

Il apparaît ainsi clairement que la dynamique du procédé bouclé dépendra du choix des matrices  $K_o$  et  $K_c$  ( $K_c$  intervient dans le calcul de la matrice  $G$  d'après l'équation [34]). Par conséquent avec les équations [19] et [31], cette dynamique dépendra du choix des matrices de pondération  $Q_o$ ,  $R_o$ ,  $Q_c$  et  $R_c$ .

En vue d'ajuster la pondération des matrices  $Q_c$  et  $R_c$  du critère quadratique  $J_c$ , on peut définir un scalaire positif  $h_c$  et un horizon de commande positif  $T_c$  tels que (de Larminat, 2007) :

$$T_c = T_o / h_c \quad [35]$$

Pour ajuster facilement la matrice  $R_c$ , on peut alors utiliser un grammien partiel de commandabilité défini comme suit sur un horizon temporel  $T_c$  :

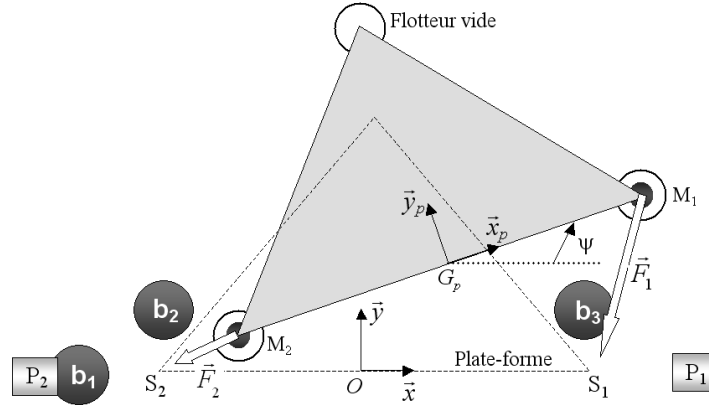
$$H_c(T_c) = \int_0^{T_c} \exp(A_{11}^T \cdot t) \cdot D_1^T \cdot D_1 \cdot \exp(A_{11} \cdot t) \cdot dt \quad [36]$$

Il est ensuite possible de choisir (de Larminat, 2007) :

$$R_c = T_c \cdot B_1^T \cdot H_c(T_c) \cdot B_1 \quad \text{et} \quad Q_c = D_1^T \cdot D_1 \quad [37]$$

## 6. Configuration de la plate-forme complète

Le principe de flottaison magnétique actif décrit dans la section 4a, a servi de base pour la conception de la plate-forme complète. La figure 10 présente une configuration particulière de la plate-forme qui a été adoptée pour simplifier les équations différentielles qui régissent la dynamique de la plate-forme dans le plan horizontal et pour limiter le couplage entre les différentes directions de mesure.



**Figure 10.** Configuration particulière de la plate-forme (vue du dessus)

Cette configuration comporte deux aimants mobiles  $M_1$  et  $M_2$  placés à l'intérieur de deux flotteurs sur les deux coins de la plate-forme, deux paires d'aimants porteurs  $p_1$  et  $p_2$  qui assurent la stabilité de la plate-forme dans le plan horizontal et trois paires de bobines  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$  qui contrôlent la position de la plate-forme suivant les trois directions de mesure  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\psi$ . Deux flotteurs vides sont placés sur le troisième et le quatrième coin. Notons que seulement la moitié de la plate-forme est représentée sur la figure 10. Le centre de gravité  $G_p$  de la plate-forme est au centre de  $[M_1 M_2]$ . Nous supposons que la plate-forme se déplace uniquement dans le plan  $(x0y)$  et qu'elle

est en mouvement quelconque par rapport à un repère fixe  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ . Nous définissons également un repère  $R_p(G_p, \vec{x}_p, \vec{y}_p)$  lié à la plate-forme, dont l'origine est le centre de gravité  $G_p$  de cette dernière, avec :

$$G_p = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_{/R_0} \text{ et } (\vec{x}_0, \vec{x}_p) = \psi$$

$X$  et  $Y$  sont les coordonnées de la plate-forme dans le repère fixe  $R_0$ . Lorsque la plate-forme est à sa position initiale les deux repères  $R_0$  et  $R_p$  sont confondus.

La dynamique de la plate-forme selon ses six degrés de liberté est non linéaire et un simulateur a été développé pour étudier ces non-linéarités (voir sous-section 8.2). Lorsqu'un couple et une force externes sont appliqués à la plate-forme, celle-ci tend à s'éloigner de sa configuration d'équilibre au repos (laquelle correspond à des courants, une force et un couple externe nuls). Dans  $R_0$ , cette configuration est donnée par  $C = (X, Y, \psi) = (0, 0, 0)$ . La commande en courant doit alors ramener la plate-forme à cette configuration  $C$  pour que la force et le couple puissent être estimés. Si la commande est suffisamment réactive pour que les déplacements de la plate-forme restent faibles autour de  $C$ , il est possible d'envisager une approche classique de synthèse de contrôleur après linéarisation du comportement de la plate-forme autour de  $C$ .

## 7. Modèle linéaire de la plate-forme

Les entrées du système sont les courants  $(i_1, i_2, i_3)$  dans les bobines, la force externe  $(F_x^{ext}, F_y^{ext})$  appliquée à la plate-forme dans le plan  $(xOy)$  et le couple externe  $\zeta_z^{ext}$  selon  $\vec{z}$  qui sont considérés comme des entrées inconnues de perturbations qu'il faut déterminer. Les sorties sont les coordonnées  $(X, Y, \psi)$  de la plate-forme dans le plan horizontal avec  $\psi$  l'angle de rotation de la plate-forme autour de la verticale.

Les équations différentielles linéarisées (autour de la configuration de repos stable) qui régissent le comportement dynamique de la plate-forme dans le plan horizontal sont (Cherry, 2009) :

$$\begin{aligned} m\ddot{X} &= -2K_x^m X - K_x^v \dot{X} - K^e i_1 + F_x^{ext} \\ m\ddot{Y} &= -2K_y^m Y - K_y^v \dot{Y} + K^e (i_2 + i_3) + F_y^{ext} \\ J_\psi \ddot{\psi} &= -K^e \delta (i_2 - i_3) - 2K_y^m \psi \delta^2 - k_{xy}^v \dot{\psi} + \zeta_z^{ext} \end{aligned} \quad [38]$$

avec  $\delta = (G_p M_1) = (G_p M_2) = 3 \text{ cm}$  sur le prototype en cours de développement (voir figure 11). Ce modèle n'est valable que pour un angle  $\psi$  petit et il ne tient pas compte de la composante tangentielle de la force électromagnétique générée par les bobines sur chaque aimant  $M_1$  et  $M_2$ . Ce modèle simplifié permet de découpler les trois axes à commander en posant simplement  $i_y = i_2 + i_3$  et  $i_\psi = i_2 - i_3$ . On

se retrouve finalement avec un système découplé décrit par les nouvelles équations différentielles :

$$\begin{aligned} m\ddot{X} &= -2K_x^m \cdot X - K_x^v \cdot \dot{X} - K^e \cdot i_1 + F_x^{ext} \\ m\ddot{Y} &= -2K_y^m \cdot Y - K_y^v \cdot \dot{Y} + K^e \cdot i_2 + F_y^{ext} \\ J_\psi \ddot{\psi} &= -K^e \cdot \delta \cdot i_\psi - 2K_y^m \psi \delta^2 - k_{xy}^v \dot{\psi} + \zeta_z^{ext} \end{aligned} \quad [39]$$

Ces équations sont similaires à celle du ressort magnétique actif [4]. Par conséquent, pour asservir la plate-forme, il suffit de suivre la démarche exposée dans la section 5 avec un modèle d'état complet de la plate-forme calculé à partir des équations [39] :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X \\ Y \\ \psi \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} F_x^{ext} \\ F_y^{ext} \\ \zeta_z^{ext} \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} X \\ Y \\ \psi \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} X \\ Y \\ \psi \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad [40]$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2K_x^m}{m} & 0 & 0 & -\frac{K_x^v}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2K_y^m}{m} & 0 & 0 & -\frac{K_y^v}{m} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\delta^2 \cdot K_m^y}{J_\psi} & 0 & 0 & -\frac{K_v^{rot}}{J_\psi} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & -\frac{K^e}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & \frac{K^e}{m} & \frac{K^e}{m} \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_\psi} & 0 & -\frac{\delta \cdot K^e}{J_\psi} & \frac{\delta \cdot K^e}{J_\psi} \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

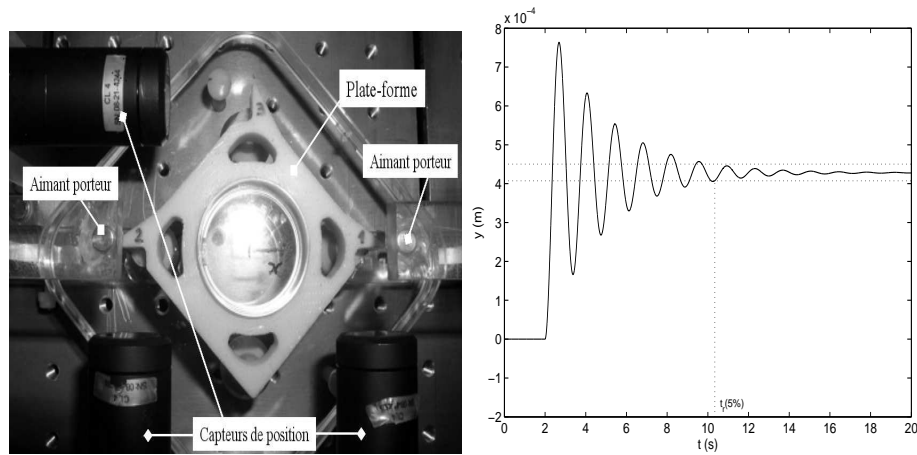
## 8. Régulation de la plate-forme

La plate-forme est un système à six entrées scalaires et trois sorties scalaires. Le nouveau reconstruteur utilise les consignes  $(x_c, y_c, \psi_c) = (0, 0, 0)$ , les coordonnées  $(X, Y, \psi)$  de la plate-forme dans le plan horizontal ainsi que les courants  $(i_1, i_2, i_3)$  dans les bobines pour estimer le vecteur d'état étendu  $X_o$ . Cette estimation  $\hat{X}_o$  fournit l'estimation de  $(F_x^{ext}, F_y^{ext}, \zeta_z^{ext})$  et est utilisée par le contrôleur pour réguler en position la plate-forme.

Les paramètres choisis pour le modèle linéaire [40] de la plate-forme sont les suivants :  $K_m^x = K_m^y = 15 \times 10^{-3}$  N/m,  $K^e = -1,716 \times 10^{-4}$  N/A,

$K_v^x = K_v^y = 0,9 \times 10^{-3} \text{ N.s/m}$ ,  $K_v^{frot} = 1,2 \times 10^{-3} \text{ N.s}$ ,  $m = 0,004 \text{ kg}$  et  $J_\psi = 0,5 \text{ m.kg}$ .

Ces valeurs représentent des valeurs typiques pour le prototype expérimental de la plate-forme qui est en cours de conception (voir figure 11). Avec de telles valeurs, la réponse indicielle de la plate-forme selon  $\vec{y}$  est donnée par la figure 11. On constate que le temps de réponse à 95% est de 10,3 secondes.



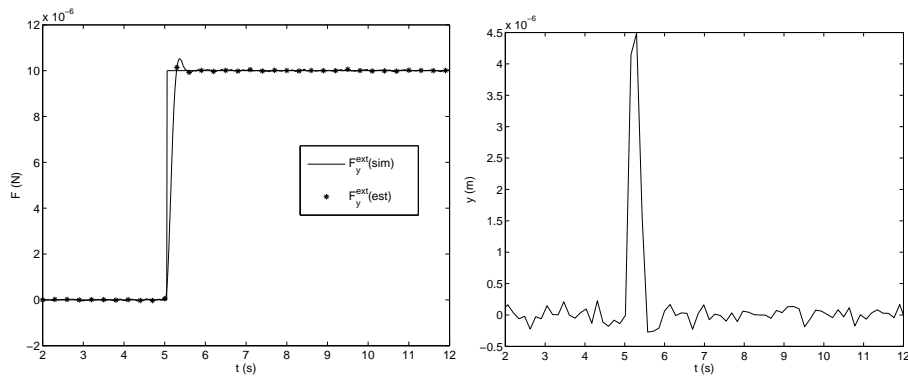
**Figure 11.** *Prototype expérimental passif et réponse indicielle simulée de la plate-forme à un échelon de force  $F_y^{ext}$  de  $10 \mu\text{N}$*

### 8.1. Réglage des paramètres $T_o$ et $T_c$

Il est clair que le réglage des paramètres  $T_o$ ,  $T_c$  et  $h_c$ , intervenant dans le calcul des matrices  $K_o$  et  $K_c$ , aura des incidences sur les performances du système. La démarche heuristique de réglage proposée par de Larminat (2007) est la suivante : une première étape consiste à attribuer une valeur fixe à  $h_c$  avec  $T_c = \frac{1}{\lambda_2}$ ,  $\lambda_2$  étant le module du deuxième pôle du transfert en boucle ouverte, en partant du mode le plus lent.  $T_o$  est calculé à partir de  $T_c$  et  $h_c$  via l'équation [35]. Il faut ensuite que le concepteur fasse varier  $T_c$  et  $T_o$  dans de très larges proportions à partir de ce choix initial. Le choix de ces paramètres conditionnera les performances de l'estimation et de la poursuite de la consigne. En effet, pour une petite valeur de  $T_o$  on se retrouve avec un observateur à dynamique rapide mais plus sensible aux bruits entachant les mesures. Une grande valeur de  $T_c$  entraîne une commande peu énergétique qui se traduit par un grand pic de déplacement au moment de l'application de la force.

## 8.2. Validation en simulation

Dans une optique de validation pour faciliter le dimensionnement du prototype, nous avons simulé la réponse en boucle fermée de la plate-forme lorsqu'elle est excitée par un échelon de force de  $10 \mu\text{N}$  appliqué suivant  $\vec{y}$ . L'intensité du bruit de mesure blanc gaussien centré des trois capteurs de déplacement est de  $4 \times 10^{-18} \text{ m}^2 \text{ s}$ . La disposition particulière de ces capteurs permet de déterminer la configuration  $(X, Y, \psi)$  de la plate-forme à l'aide d'une transformation non linéaire des trois mesures de déplacement  $(d_1, d_2, d_3)$ . Cette transformation ne sera pas détaillée ici. Notons que du fait de la non-linéarité de cette transformation, les bruits sur  $(X, Y, \psi)$  ne peuvent plus être considérés comme gaussiens. Ainsi, comme le suggère de Larminat,  $Q_0$  et  $R_0$  doivent être considérées non pas comme des matrices d'intensité des bruits, mais comme des matrices de pondération influant sur le choix du gain  $K_0$  (voir sous-section 5.3). La simulation non linéaire de la dynamique de la plate-forme selon 6 ddl résout numériquement les équations différentielles non linéaires obtenues à partir du principe fondamental de la dynamique. Les couplages entre les différentes directions de mesure sont pris en compte. Les forces magnétiques et électromagnétiques, également non linéaires, sont calculées à l'aide de modèles analytiques complets des champs magnétiques et électromagnétiques dans lesquels sont plongés les aimants  $M_1$  et  $M_2$ . Contrairement à la modélisation simplifiée proposée précédemment, les influences de *tous* les aimants porteurs  $p_i$  et bobines  $b_i$  sont prises en compte pour calculer les forces magnétiques et électromagnétiques appliquées à  $M_1$  et  $M_2$ .

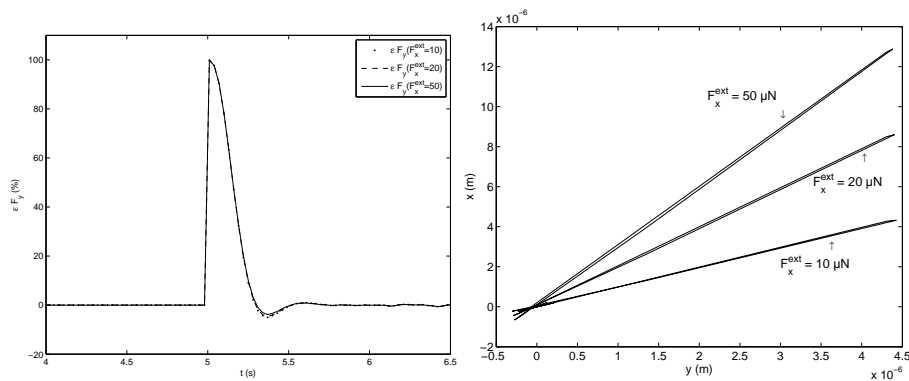


**Figure 12.** Echelon de force simulé/estimé et déplacement de la plate-forme suivant  $\vec{y}$

La figure 12 représente la réponse de l'estimateur de la force ainsi que le déplacement de la plate-forme suivant  $\vec{y}$  lors de l'application de l'échelon de force avec  $T_o = 0,1$  et  $T_c = 0,008$  s. On constate que le temps de réponse de l'estimateur est de l'ordre de 0,4 s avec un bruit très faible sur l'estimation de  $F_y^{ext}$  en régime permanent. Par ailleurs, la variance du bruit est ajustable en jouant sur l'horizon d'observation



$T_o$  (Cherry, 2009), ce qui permet d'ajuster la résolution du capteur à l'amplitude du signal de force. La commande engendre un pic de déplacement de  $4,5 \times 10^{-6}$  m au moment de l'application de l'échelon de force. Ce temps de réponse de l'estimateur est à comparer avec celui de la plate-forme en BO (10,3 s). Il est similaire pour la mesure de couple. La figure 13 représente les erreurs  $\epsilon_{F_y}$  (%) sur les estimations d'un échelon  $F_y^{ext}$  de  $10 \mu\text{N}$  pour différents échelons  $F_x^{ext}$  (10, 20 et  $50 \mu\text{N}$ ) appliqués simultanément. Le déplacement de la plate-forme dans le plan ( $xOy$ ) est également représenté avec un retour à «zéro» bien rectiligne. Cette figure illustre que la valeur de  $F_x^{ext}$  influe peu sur l'estimation de  $F_y^{ext}$  malgré les couplages.



**Figure 13.** Erreurs sur les estimations d'un échelon  $F_y^{ext}$  de  $10 \mu\text{N}$  pour différentes valeurs de  $F_x^{ext}$  et déplacement de la plate-forme dans le plan ( $xOy$ )

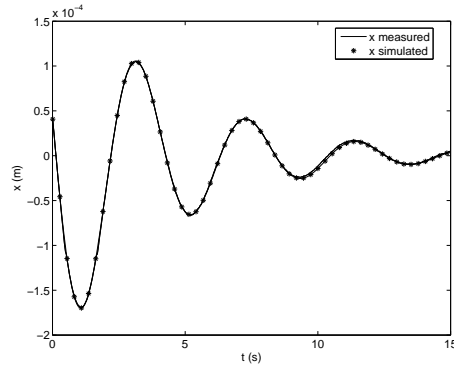
## 9. Robustesse de la commande par synthèse $H_2$

Cette section est consacrée à l'illustration à l'aide d'exemples de la robustesse du contrôle par synthèse  $H_2$ , sans avoir recours à des critères quadratiques temporels ou fréquentiels. Deux types de robustesse sont à considérer :

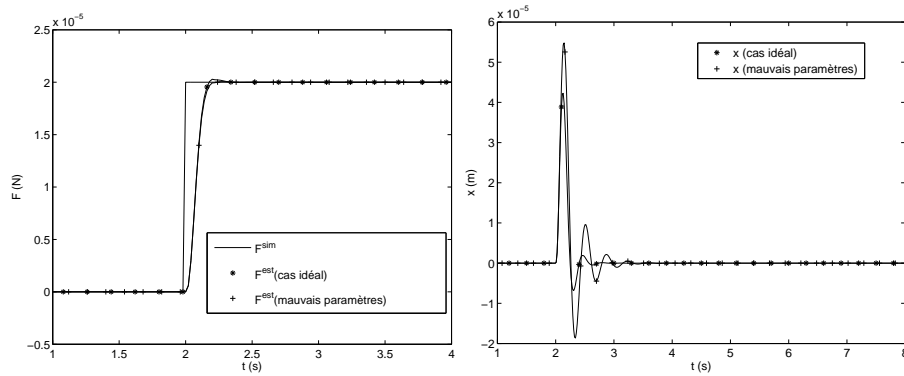
- robustesse vis-à-vis des bruits de mesure ;
- robustesse vis-à-vis de l'évolution des paramètres du système.

La robustesse vis-à-vis des bruits de mesure représente la capacité de la méthode de contrôle à anticiper et à compenser le facteur bruit qui influence de manière significative le système. Nous avons vu, d'après la figure 12, que la méthode de contrôle par synthèse  $H_2$  présente des bonnes performances pour ce qui concerne le bruit ajouté. Par conséquent, dans cette section, nous allons nous intéresser uniquement à la robustesse obtenue vis-à-vis de l'évolution des paramètres du système.

Ces paramètres sont identifiés à partir de la réponse expérimentale en régime libre avec des conditions initiales inconnues. La figure 14 illustre la qualité du modèle linéaire obtenu suivant l'axe  $x$ . Une qualité similaire est obtenue suivant les deux autres degrés de liberté. La masse  $m$  de la plate-forme est mesurée avec une microbalance précise au milligramme près. La marge d'erreur sur l'identification des paramètres est inférieure à 1%.



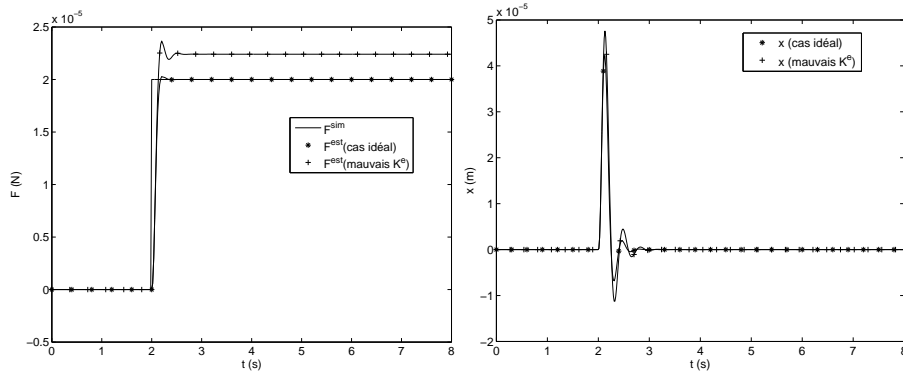
**Figure 14.** Réponse expérimentale, en régime libre suivant  $x$  et réponse du modèle linéaire identifié



**Figure 15.** Influence de la masse, des raideurs magnétiques et des coefficients de frottements visqueux sur la dynamique de la plate-forme et sur l'estimation d'une force  $F_x^{ext}$  de  $20 \mu N$

Nous allons illustrer dans ce qui suit le comportement du régulateur avec une identification dégradée de manière irréaliste.

En conservant le *même* régulateur, on fait simultanément varier de 23% les paramètres  $K_x^m$ ,  $K_y^m$ ,  $K_x^v$ ,  $K_y^v$  et  $m$  de la section 8. Ces nouveaux paramètres sont injectés dans le bloc Simulink qui simule le comportement non linéaire de la plate-forme réelle. La figure 15 représente l'estimation d'un échelon de force de  $20 \mu\text{N}$  appliqué aux deux plate-formes suivant  $\vec{x}$  dans ces conditions. D'après cette courbe, nous notons que la stabilité de l'estimation de la force est robuste pour la dégradation imposée des paramètres et que les performances dynamiques sont également robustes : il n'y a pas de détérioration majeure du temps de réponse et du rapport signal sur bruit de l'estimation. La dynamique de la plate-forme est par contre plus dégradée que celle de l'estimateur de la force. La robustesse de l'estimateur de force est amplement suffisante pour les domaines d'application qui sont envisagés pour ce capteur (caractérisation de surface fonctionnalisée pour la microrobotique, étude des interactions mécaniques basse fréquence dans le micromonde...).



**Figure 16.** Influence du paramètre  $K^e$  sur la dynamique de la plate-forme et sur l'estimation d'une force  $F_x^{ext}$  de  $20 \mu\text{N}$

En cas de mauvaise identification de la raideur électromagnétique  $K^e$ , le contrôleur reste robuste comme l'illustre la figure 16 : une variation de 12 % de ce paramètre par rapport au modèle nominal induit une variation tolérable de la dynamique du retour à zéro de la position de la plate-forme et l'erreur statique en position reste nulle. Par contre, dans ce cas, l'estimation de la force par l'observateur est directement biaisée. En effet, en régime stationnaire et à la position d'équilibre ( $S_1, S_2$ ), la force magnétique  $\vec{F}^{mag}$  et la force de frottement visqueux  $\vec{F}^v$  sont nécessairement nulles. La force externe  $\vec{F}^{ext}$  est alors donnée par  $\vec{F}^{ext} = -\vec{F}^{elec} = -K^e \cdot \vec{i}$  (cf. équation [4]). Comme l'observateur tend vers cette expression en régime stationnaire, une variation de 12 % sur  $K^e$  entraîne forcément une erreur d'estimation identique de la force : l'erreur d'estimation de la force dépend linéairement de l'erreur d'identification de  $K^e$ . Le paramètre  $K^e$  est donc un paramètre critique qui doit être identifié avec la meilleure précision possible.

## 10. Conclusion

Ce travail aborde sous l'angle de la synthèse  $H_2$  la problématique générale de la reconstruction d'un signal d'entrée à partir d'un signal de sortie bruité. La démarche de synthèse retenue a été évaluée sur un capteur simulé qui utilise le principe des ressorts magnétiques actifs. Cette démarche permet d'estimer la force et le couple, considérés comme des entrées inconnues, en injectant un modèle de connaissance stochastique très sommaire (processus de Wiener) sur la dynamique de ces entrées. L'estimation est alors robuste sur un échelon de force ou de couple malgré les erreurs de la modélisation linéaire du capteur (non linéaire), la dynamique mal amortie du transducteur, les bruits de mesure et l'incertitude sur la dynamique réelle de la force et du couple à estimer. Néanmoins, cette robustesse est conditionnée à une bonne identification de la raideur électromagnétique. Cette démarche présente l'avantage de n'avoir à régler que deux paramètres qui sont des horizons de commande et d'observation. Ces paramètres se règlent de manière assez intuitive et conditionnent le temps de réponse de l'estimateur ainsi que la variance finale sur l'estimation c'est-à-dire le rapport signal (inconnu) sur bruit de l'estimateur. En fonction de la dynamique supposée de la force ou du couple, l'utilisateur peut donc ajuster à sa guise ces paramètres pour privilégier soit le temps de réponse de l'estimateur, soit la variance de l'estimation. Plus la force à estimer est faible et plus il faut privilégier une variance faible aux dépens du temps de réponse. Le prototype expérimental du capteur, actuellement en cours de développement, va permettre d'évaluer la qualité des estimations obtenues. Une validation croisée avec d'autres capteurs de force sera nécessaire car il n'existe aucun étalon de force en dessous du millinewton.

## Remerciements

Les résultats présentés dans cet article ont été obtenus dans le cadre du projet de recherche STIL $\mu$ Force soutenue par l'Agence nationale de la recherche française (projet ANR-07-ROBO-0005 démarré en février 2008 et d'une durée de trois ans).

## 11. Bibliographie

- Arai F., Andu D., Nonoda Y., Fukuda T., Iwata H., Itoigawa K., « Micro endeffector with micro pyramids and integrated piezoresistive force sensor », *proc. of int. conf on Intelligent Robots and Systems, IROS 96*, vol. 2, p. 842-849, 1996.
- Arai F., Kawaji A., Sugiyama T., Onomura Y., Ogawa M., Fukuda T., Iwata H., Itoigawa K., « 3D micromanipulation system under microscope », *International symposium on micromechatronics and human science*, p. 127-134, 1998.
- Boukallel M., Abadie J., Piat E., « Levitated micro-nano force sensor using diamagnetic levitation », *Proc. of the IEEE International Conference of Robotics and Automation*, p. 3219-3224, September, 2003a.

- Boukallel M., Gauthier M., Piat E., Abadie J., Roux C., « Microrobots for in vitro fertilization applications », *Journal of American society - Cellular and Molecular biology*, May, 2004.
- Boukallel M., Piat E., Abadie J., « Passive diamagnetic levitation : theoretical foundations and application to the design of a micro-nano force sensor », *Proceedings of the 2003 IEEE/RSJ intl. Conference on Intelligent Robots and Systems Las Vegas, Nevada*, p. 1062-1067, October, 2003b.
- Cherry A., Etude, conception et optimisation d'une plate-forme de mesure de micro et nano force par flottaison magnétique, PhD thesis, UFR des Sciences et Techniques de l'Université de Franche-Comté, 2009.
- Cherry A., Abadie J., Piat E., « Microforce sensor for microbiological applications based on a floating-magnetic principle », *IEEE International Conference on Robotic and Automation*, p. 10-14, April, 2007.
- Clayton R., Wiggins R., « Source shape estimation and deconvolution of teleseismic body-waves », *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, vol. 47, p. 151-177, 1976.
- Darouach M., Zasadzinski M., XU S., « Full-order observers for linear systems with unknown inputs », *IEEE trans. on Automatic Control*, vol. 39, p. 606-609, 1994.
- de Larminat P., *Automatique : commande des systèmes linéaires*, 2nd edn, Hermès, 2000.
- de Larminat P., *Automatique appliquée*, Hermès, 2007.
- Fujii Y., « Methode for generating and measuring the micro-Newton level forces », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 20, p. 1362-1371, 2006.
- Girot M., Boukhalel M., Régnier S., « Towards a non-destructive in vitro biomechanical characterization », *ASM - IEEE EMBS Conference on Bio-, Micro- and Nanosystems*, p. 68-73, janvier, 2006.
- Hou M., Mtiller P., « Design of observer for linear systems with unknown inputs », *IEEE trans. on Automatic Control*, vol. 37, p. 871, 1992.
- Johnson C., « Observers for linear systems with unknown and inaccessible inputs », *International journal of control*, vol. 21, p. 825-831, 1975.
- Kato N., Suzuki I., Kikuta H., Iwata K., « Force-balancing microforce sensor with an optical-fiber interferometer », *Review of scientific instruments*, vol. 68, p. 2475-2478, juin 1997.
- Lang B., Paquier P., Friedt J., « One way to design the control law of a mini-UAV », *3rd US-European competition and workshop on micro air vehicle systems (MAV07) and european air vehicle conference and flight competition (EMAV2007)*, September, 2007.
- Li W., Xi N., « Novel micro gripping, probing and sensing devices for single-cell surgery », *Proceedings of the 26th international conference of the IEEE EMBS San Francisco, CA, USA*, p. 2591-2594, September, 2004.
- Liu C., Peng H., « Inverse-dynamics based state and disturbance observers for linear time-invariant systems », *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, vol. 124, p. 375-381, 2002.
- Maybeck P., « Stochastic models, estimation, and control », *Academic press, inc.*, 1979.
- Rakotondrabe M., Lutz P., « Force estimation in a piezoelectric cantilever using the inverse-dynamics-based UIO technique », *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, p. 2205-2210, 2009.

- Rougeot P., Régnier S., Chaillet N., « Forces analysis for micro-manipulation », *Proceedings 2005 IEEE international symposium on computational intelligence in robotics and automation*, p. 105-110, June, 2005.
- Sekko E., Quelques applications du filtrage optimal à la déconvolution, PhD thesis, Université Claude Bernard-Lyon I, 1992.
- Soen J., Contribution à la modélisation et à la commande des microsystèmes capteurs non linéaires, PhD thesis, Université Joseph Fourier, 2007.
- Sun Y., Fry N., Potasek D., Bell D., Nelson B., « Characterizing fruit fly flight behaviour using a microforce sensor with a new comb-drive configuration », *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 14, p. 4-11, 2005.
- Sun Y., Kai-Tak W., Roberts K., Bischof J., Bradley J., « Mechanical property characterization of mouse zona pellucida », *IEEE Transactions on Nanobioscience*, vol. 2, n° 4, p. 279-285, December, 2003.
- Yi X., Mehrdad S., « Unknown disturbance inputs estimation based on a state functional observer design », *Automatica*, vol. 39, p. 1389-1398, 2003.